NCERT Class 10 Maths Exercise 1.3 (प्रश्नावली 1.3)

प्रश्न 1. सिध्द कीजिए कि $\sqrt{5}$ एक अपरिमेय संख्या है ।

हल :- माना $\sqrt{5}$ एक परिमेय संख्या है ।

अत: हम दो पूर्णांक a और b के लिए $\sqrt{5} = \frac{a}{b}$;($b \neq 0$) ....(i) लिख सकते हैं ।

जहां a और b में 1 के अतिरिक्त कोई उभयनिष्ठ गुण्नखण्ड नहीं है अर्थात a और b सहअभाज्य हैं ।

समीकरण (i) से $\sqrt{5}\ b = a$

दोनों पक्षों का वर्ग करने पर $5b^2 = a^2$ .... (ii)

अत: a^2, 5 से विभाजित है इसलिए 5, a को भी विभाजित करेगा ।

अत: a = 5c, जहां c कोई पूर्णांक है ।

समीकरण (ii) में a = 5c रखने पर

$$5b^2 = 25c^2$$

$$b^2 = 5c^2$$

अर्थात b^2, 5 से विभाजित है तो 5, b को भी विभाजित करेगा ।

अत: a और b में कम से कम एक उभयनिष्ठ गुणनखण्ड 5 है । परन्तु इससे तथ्य का विरोधाभास प्राप्त होता है कि a और b सहअभाज्य हैं ।

हमें यह विरोधाभास अपनी त्रुटीपूर्ण कल्पना के कारण हुआ है कि $\sqrt{5}$ एक परिमेय संख्या है ।

अत: हम निष्कर्ष निकालते हैं कि $\sqrt{5}$ एक अपरिमेय संख्या है ।

प्रश्न 2. **सिध्द कीजिए कि $3 + 2\sqrt{5}$ एक अपरिमेय संख्या है ।**

हल :- माना $3 + 2\sqrt{5}$ एक परिमेय संख्या है ।

अत: हम दो पूर्णांक a और b के लिए $3 + 2\sqrt{5} = \frac{a}{b}$;($b \neq 0$) ....(i) लिख सकते हैं ।

जहां a और b में 1 के अतिरिक्त कोई उभयनिष्ठ गुण्नखण्ड नहीं है अर्थात a और b सहअभाज्य हैं ।

चूंकी $3 + 2\sqrt{5} = \frac{a}{b}$

$$2\sqrt{5} = \frac{a}{b} - 3$$

$$\sqrt{5} = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{b} - 3\right) \quad .... \text{(ii)}$$

$\frac{1}{2}\left(\frac{a}{b} - 3\right)$ एक परिमेय संख्या है तो समीकरण (ii) से $\sqrt{5}$ भी एक परिमेय संख्या होगी । जबकि हम जानते हैं कि $\sqrt{5}$ एक अपरिमेय संख्या है, जो कि विरोधाभास उत्पन्न करता है ।

हमें यह विरोधाभास अपनी त्रुटीपूर्ण कल्पना के कारण हुआ है, अत: हम निष्कर्ष निकालते हैं कि **$3 + 2\sqrt{5}$** एक अपरिमेय संख्या है ।

प्रश्न 3. सिध्द कीजिए कि निम्न संख्याऐं अपरिमेय हैं -

(i) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (ii) $7\sqrt{5}$ (iii) $6 + \sqrt{2}$

हल :- (i) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

माना $\frac{1}{\sqrt{2}}$ एक परिमेय संख्या है ।

अत: हम दो पूर्णांक a और b के लिए $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{a}{b}$;(b $\neq$ 0) ....(i) लिख सकते हैं ।

जहां a और b में 1 के अतिरिक्त कोई उभयनिष्ठ गुण्नखण्ड नहीं है अर्थात a और b सहअभाज्य हैं ।

समीकरण (i) से $\sqrt{2} = \frac{b}{a}$

$\sqrt{2}\ a = b$

दोनों पक्षों का वर्ग करने पर $2a^2 = b^2$ .... (ii)

अत: b^2, 2 से विभाजित है इसलिए 2, b को भी विभाजित करेगा ।

अत: b = 2c, जहां c कोई पूर्णांक है ।

समीकरण (ii) में b = 2c रखने पर

$2a^2 = (2c)^2$

$2a^2 = 4c^2$

$a^2 = 2c^2$

अर्थात a^2, 2 से विभाजित है तो 2, a को भी विभाजित करेगा ।

जिससे यह स्पष्ट होता है कि a और b में कम से कम एक उभयनिष्ठ गुणनखण्ड 2 है । परन्तु इससे तथ्य का विरोधाभास प्राप्त होता है कि a और b सहअभाज्य हैं ।

हमें यह विरोधाभास अपनी त्रुटीपूर्ण कल्पना के कारण हुआ है कि $\frac{1}{\sqrt{2}}$ एक परिमेय संख्या है ।

अत: हम निष्कर्ष निकालते हैं कि $\frac{1}{\sqrt{2}}$ एक अपरिमेय संख्या है ।

(ii) $7\sqrt{5}$

माना $7\sqrt{5}$ एक परिमेय संख्या है ।

अत: हम दो पूर्णांक a और b के लिए $7\sqrt{5} = \frac{a}{b}$;(b $\neq$ 0) ....(i) लिख सकते हैं ।

जहां a और b में 1 के अतिरिक्त कोई उभयनिष्ठ गुण्नखण्ड नहीं है अर्थात a और b सहअभाज्य हैं ।

चूंकी $7\sqrt{5} = \frac{a}{b}$

$\sqrt{5} = \frac{a}{7b}$ .... (ii)

$\frac{a}{7b}$ एक परिमेय संख्या है तो समीकरण (ii) से $\sqrt{5}$ भी एक परिमेय संख्या होगी । जबकि हम जानते हैं कि $\sqrt{5}$ एक अपरिमेय संख्या है, जो कि विरोधाभास उत्पन्न करता है ।

हमें यह विरोधाभास अपनी त्रुटीपूर्ण कल्पना के कारण हुआ है, अत: हम निष्कर्ष निकालते हैं कि एक $7\sqrt{5}$ अपरिमेय संख्या है ।

(iii) $6 + \sqrt{2}$

माना $6 + \sqrt{2}$ एक परिमेय संख्या है ।

अत: हम दो पूर्णांक a और b के लिए $6 + \sqrt{2} = \frac{a}{b}$;($b \neq 0$) ....(i) लिख सकते हैं ।

जहां a और b में 1 के अतिरिक्त कोई उभयनिष्ठ गुण्नखण्ड नहीं है अर्थात a और b सहअभाज्य हैं ।

चूंकी $6 + \sqrt{2} = \frac{a}{b}$

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b} - 6$$

$$\sqrt{2} = \left(\frac{a}{b} - 6\right) \text{ .... (ii)}$$

$\left(\frac{a}{b} - 6\right)$ एक परिमेय संख्या है तो समीकरण (ii) से $\sqrt{2}$ भी एक परिमेय संख्या होगी । जबकि हम जानते हैं कि $\sqrt{2}$ एक अपरिमेय संख्या है, जो कि विरोधाभास उत्पन्न करता है ।

हमें यह विरोधाभास अपनी त्रुटीपूर्ण कल्पना के कारण हुआ है, अत: हम निष्कर्ष निकालते हैं कि $6 + \sqrt{2}$ एक अपरिमेय संख्या है ।