

NCERT Exercise 3.5 class 10 maths में हम रैखिक समीकरण युग्म को वज्र गुणन विधि (बीजगणितीय विधि) से हल ज्ञात करेंगे ।

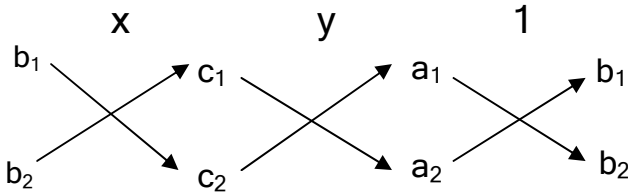
solankimaths.com

वज्र गुणन विधि : माना निम्न रैखिक समीकरण युग्म है -

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0 \dots\dots\dots (i)$$

$$a_2x + b_2y + c_2 = 0 \dots\dots\dots (ii)$$

निम्न चित्र में मान रखिए -



तीर का निशान गुणा को इंगित करता है तथा प्रथम गुणनफल में से दूसरा गुणनफल घटाना है ।

अब निम्न प्रकार लिखना है -

$$\frac{x}{b_1c_2 - b_2c_1} = \frac{y}{c_1a_2 - c_2a_1} = \frac{1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

अब तुलना करके x और y के मान ज्ञात कर लीजिए जबकि $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$

NCERT Class 10 Maths Exercise 3.5 (प्रश्नावली 3.5)

प्रश्न 1. निम्न रैखिक समीकरणों के युग्मों में से किसका एक अद्वितीय हल है, किसका कोई हल नहीं है या किसके अपरिमित रूप से अनेक हल हैं । अद्वितीय हल की स्थिति में उसे वज्र गुणन विधि से ज्ञात कीजिए ।

(i) $x - 3y - 3 = 0$ (ii) $2x + y = 5$

$3x - 9y - 2 = 0$ $3x + 2y = 8$

(iii) $3x - 5y = 20$ (iv) $x - 3y - 7 = 0$

$6x - 10y = 40$ $3x - 3y - 15 = 0$

हल :- (i) $x - 3y - 3 = 0 \dots\dots\dots (i)$

$3x - 9y - 2 = 0 \dots\dots\dots (ii)$

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{1}{3}, \frac{b_1}{b_2} = \frac{-3}{-9} = \frac{1}{3}, \frac{c_1}{c_2} = \frac{-3}{-2} = \frac{3}{2}$$

चूंकी $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$

अतः कोई हल नहीं प्राप्त होगा ।

(ii) $2x + y - 5 = 0 \dots\dots\dots (i)$

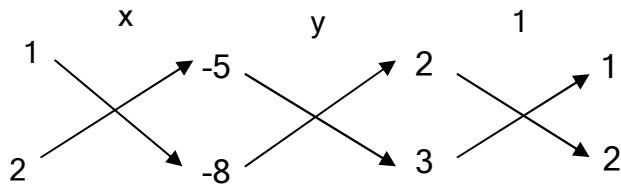
$3x + 2y - 8 = 0 \dots\dots\dots (ii)$

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{2}{3}, \quad \frac{b_1}{b_2} = \frac{1}{2}$$

चूंकी $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$

अतः अद्वितीय हल प्राप्त होगा ।

वज्र गुणन विधि



$$\frac{x}{(1)(-8) - (-2)(-5)} = \frac{y}{(-5)(3) - (-8)(2)} = \frac{1}{(2)(2) - (-3)(1)}$$

$$\frac{x}{-8+10} = \frac{y}{-15+16} = \frac{1}{4-3}$$

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{1} = 1$$

$$\frac{x}{2} = 1 \text{ तथा } \frac{y}{1} = 1$$

अतः हल $x = 1$ तथा $y = 1$

(iii) $3x-5y-20 = 0$ (i)

$6x-10y-40 = 0$ (ii)

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}, \quad \frac{b_1}{b_2} = \frac{-5}{-10} = \frac{1}{2}, \quad \frac{c_1}{c_2} = \frac{-20}{-40} = \frac{1}{2}$$

चूंकी $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$

अतः अपरिमित रूप से अनेक हल प्राप्त होंगे ।

(iv) $x-3y-7 = 0$ (i)

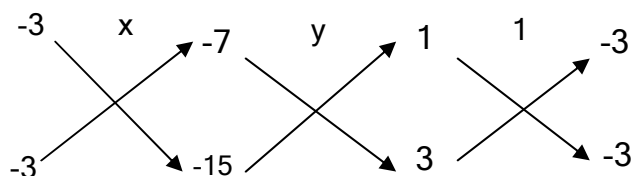
$3x-3y-15 = 0$ (ii)

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{1}{3}, \quad \frac{b_1}{b_2} = \frac{-3}{-3} = 1$$

चूंकी $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$

अतः अद्वितीय हल प्राप्त होगा ।

वज्र गुणन विधि



$$\frac{x}{(-3)(-15)-(-3)(-7)} = \frac{y}{(-7)(3)-(-15)(1)} = \frac{1}{(1)(-3)-(3)(-3)}$$

$$\frac{x}{45-21} = \frac{y}{-21+15} = \frac{1}{-3+9}$$

$$\frac{x}{24} = \frac{y}{-6} = \frac{1}{6}$$

$$\frac{x}{24} = \frac{1}{6} \text{ तथा } \frac{y}{-6} = \frac{1}{6}$$

$$x = \frac{24}{6} \text{ तथा } y = \frac{-6}{6}$$

अतः हल $x = 4$ तथा $y = -1$

प्रश्न 2. (i) a और b के किन मानों के लिए निम्न रेखिक समीकरणों के युग्म के अपरिमित रूप से अनेक हल होंगे ।

$$2x+3y = 7$$

$$(a-b)x+(a+b)y = 3a+b-2$$

हल :- अपरिमित रूप से अनेक हल प्राप्त होंगे यदि -

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} \dots\dots\dots (i)$$

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{2}{a-b}, \frac{b_1}{b_2} = \frac{3}{a+b}, \frac{c_1}{c_2} = \frac{7}{3a+b-2}$$

$$\text{समीकरण (i) से } \frac{2}{a-b} = \frac{3}{a+b} = \frac{7}{3a+b-2}$$

$$\text{अर्थात् } \frac{2}{a-b} = \frac{3}{a+b} \dots\dots\dots (ii)$$

$$\frac{3}{a+b} = \frac{7}{3a+b-2} \dots\dots\dots (iii)$$

$$\text{समीकरण (ii) से } \frac{2}{a-b} = \frac{3}{a+b}$$

$$2(a+b) = 3(a-b)$$

$$2a+2b = 3a - 3b$$

$$2b+3b = 3a - 2a$$

$$5b = a \dots\dots\dots (iv)$$

a का यह मान समीकरण (iii) में प्रतिस्थापित करने पर

$$\frac{3}{5b+b} = \frac{7}{3(5b)+b-2}$$

$$\frac{3}{6b} = \frac{7}{16b-2}$$

$$3(16b-2) = 7(6b)$$

$$48b - 6 = 42b$$

$$48b - 42b = 6$$

$$6b = 6$$

$$b = 1$$

b का यह मान समीकरण (iv) में प्रतिस्थापित करने पर

$$5(1) = a$$

$$a = 5$$

अतः हल $a = 5, b = 1$

(ii) k के किस मान के लिए निम्न रैखिक समीकरणों के युग्म का कोई हल नहीं है ?

$$3x + y = 1$$

$$(2k-1)x + (k-1)y = 2k+1$$

हल :- कोई हल नहीं प्राप्त होगा यदि -

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$$

$$\frac{3}{2k-1} = \frac{1}{k-1}$$

$$3(k-1) = 1(2k-1)$$

$$3k - 3 = 2k - 1$$

$$3k - 2k = 3 - 1$$

$$k = 2$$

अतः हल $k = 2$

प्रश्न 3. निम्न रैखिक समीकरणों के युग्म को प्रतिस्थापन एवं वज्र गुणन विधियों से हल कीजिए। किस विधि को आप अधिक उपयुक्त मानते हैं ?

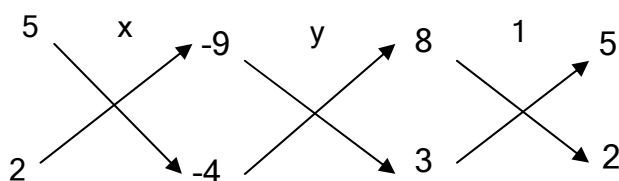
$$8x + 5y = 9$$

$$3x + 2y = 4$$

हल :- वज्र गुणन विधि -

$$8x + 5y - 9 = 0 \dots\dots\dots (i)$$

$$3x + 2y - 4 = 0 \dots\dots\dots (ii)$$



$$\frac{x}{(5)(-4) - (-9)(-4)} = \frac{y}{(-9)(3) - (-4)(8)} = \frac{1}{(8)(2) - (-3)(5)}$$

$$\frac{x}{-20+18} = \frac{y}{-27+32} = \frac{1}{16-15}$$

$$\frac{x}{-2} = \frac{y}{5} = 1$$

$$\frac{x}{-2} = 1 \text{ तथा } \frac{y}{5} = 1$$

$$x = -2 \text{ तथा } y = 5$$

अतः हल $x = -2$ तथा $y = 5$

प्रतिस्थापन विधि -

समीकरण (ii) से

$$3x+2y-4 = 0$$

$$3x = 4 - 2y$$

$$x = \frac{4-2y}{3} \dots\dots\dots (iii)$$

x का यह मान समीकरण (i) में प्रतिस्थापित करने पर

$$8\left(\frac{4-2y}{3}\right) + 5y - 9 = 0$$

$$\frac{32-16}{3} = 9 - 5y$$

$$32 - 16y = 3(9-5y)$$

$$32 - 16y = 27 - 15y$$

$$32 - 27 = 16y - 15y$$

$$5 = y$$

y का यह मान समीकरण (iii) में रखने पर

$$x = \frac{4-2(5)}{3} = \frac{4-10}{3} = \frac{-6}{3}$$

$$x = -2$$

अतः हल $x = -2$ तथा $y = 5$

वज्र गुणन विधि अधिक उपयुक्त है ।

प्रश्न 4. निम्न रेखिक समीकरणों के युग्म बनाइए और उनके हल (यदि उनका अस्तित्व हो) किसी बीजगणितीय विधि से ज्ञात कीजिए -

(i) एक छात्रावास के मासिक व्यय का एक भाग नियत है तथा शेष इस पर निर्भर करता है कि छात्र ने कितने दिन भोजन लिया है । जब एक विद्यार्थी A को, जो 20 दिन भोजन करता है, रु 1000 छात्रावास के व्यय के लिए अदा करने पड़ते हैं । जबकि विद्यार्थी B को जो 26 दिन भोजन करता है , छात्रावास के व्यय के लिए रु 1180 अदा करने पड़ते हैं । नियत व्यय और प्रतिदिन के भोजन का मूल्य ज्ञात कीजिए ।

हल :- माना छात्रावास का नियत व्यय x रु तथा प्रतिदिन भोजन का व्यय y रु है तो

विद्यार्थी A द्वारा 20 दिन भोजन करने पर कुल व्यय = 1000 रु

$$x+20y = 1000$$

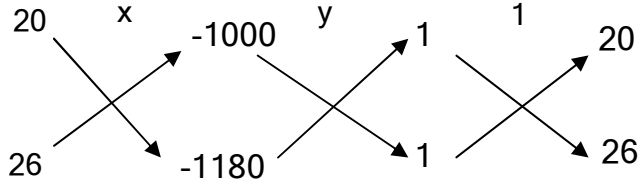
$$x+20y-1000 = 0 \dots\dots\dots (i)$$

विद्यार्थी B द्वारा 26 दिन भोजन करने पर कुल व्यय = 1180 रु

$$x+26y = 1180$$

$$x+26y-1180 = 0 \dots\dots\dots (ii)$$

वज्र गुणन विधि - समीकरण (i) व समीकरण (ii) से



$$\frac{x}{(20)(-1180) - (26)(-1000)} = \frac{y}{(-1000)(1) - (-1180)(1)} = \frac{1}{(1)(26) - (1)(20)}$$

$$\frac{x}{-23600 + 26000} = \frac{y}{-1000 + 1180} = \frac{1}{26 - 20}$$

$$\frac{x}{2400} = \frac{y}{180} = \frac{1}{6}$$

$$\frac{x}{2400} = \frac{1}{6} \text{ तथा } \frac{y}{180} = \frac{1}{6}$$

$$x = \frac{2400}{6} \text{ तथा } y = \frac{180}{6}$$

$$x = 400 \text{ तथा } y = 30$$

अतः छात्रावास का नियत व्यय 400 रु तथा प्रतिदिन भोजन का व्यय 30 रु है ।

(ii) एक भिन्न $\frac{1}{3}$ हो जाती है जब उसके अंश से 1 घटाया जाता है तथा $\frac{1}{4}$ हो जाती है जब हर में 8 जोड़ दिया जाता है । वह भिन्न ज्ञात कीजिए ।

हल :- माना भिन्न का अंश x तथा हर y है तो

प्रश्नानुसार $\frac{x-1}{y} = \frac{1}{3}$

$$3(x-1) = y$$

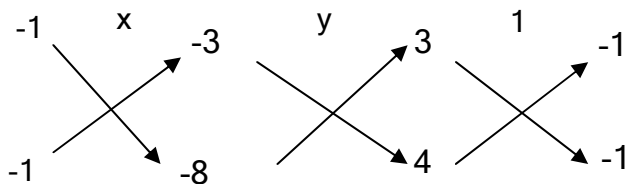
$$3x - y - 3 = 0 \dots\dots\dots (i)$$

तथा $\frac{x}{y+8} = \frac{1}{4}$

$$4x = y + 8$$

$$4x - y - 8 = 0 \dots\dots\dots (ii)$$

वज्र गुणन विधि - समीकरण (i) व समीकरण (ii) से



$$\frac{x}{(-1)(-8)-(-1)(-3)} = \frac{y}{(-3)(4)-(-8)(3)} = \frac{1}{(3)(-1)-(4)(-1)}$$

$$\frac{x}{8-3} = \frac{y}{-12+24} = \frac{1}{-3+4}$$

$$\frac{x}{5} = \frac{y}{12} = 1$$

$$\frac{x}{5} = 1 \text{ तथा } \frac{y}{12} = 1$$

$$x = 5 \text{ तथा } y = 12$$

$$\text{अतः भिन्न} = \frac{5}{12}$$

(iii) यश ने एक टेस्ट में 40 अंक अर्जित किए , जब उसे प्रत्येक उतर पर 3 अंक मिले तथा अशुद्ध उतर पर एक अंक की कटौती की गई । यदि उसे सही उतर पर 4 अंक मिलते तथा अशुद्ध उतर पर 2 अंक कटते तो यश 50 अंक अर्जित करता । टेस्ट में कितने प्रश्न थे ?

हल :- माना यश द्वारा दिए गए सही उत्तरों की संख्या x तथा अशुद्ध उत्तरों की संख्या y है तो

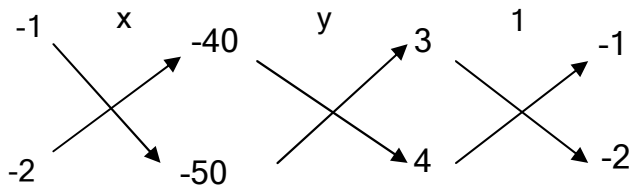
$$3x - y = 40$$

$$3x - y - 40 = 0 \text{ (i)}$$

$$4x - 2y = 50$$

$$4x - 2y - 50 = 0 \text{ (ii)}$$

वज्र गुणन विधि - समीकरण (i) व समीकरण (ii) से



$$\frac{x}{(-1)(-50)-(-2)(-40)} = \frac{y}{(-40)(4)-(-50)(3)} = \frac{1}{(3)(-2)-(4)(-1)}$$

$$\frac{x}{50-8} = \frac{y}{-160+150} = \frac{1}{-6+4}$$

$$\frac{x}{-30} = \frac{y}{-10} = \frac{1}{-2}$$

$$\frac{x}{-30} = \frac{1}{-2} \text{ तथा } \frac{y}{-10} = \frac{1}{-2}$$

$$x = \frac{-30}{-2} \text{ तथा } y = \frac{-10}{-2}$$

$$x = 15 \text{ तथा } y = 5$$

अतः टेस्ट में कुल प्रश्न = x+y = 15+5 = 20 प्रश्न

(iv) एक राजमार्ग पर दो स्थान A और B 100 km की दूरी पर हैं । एक कार A से तथा दूसरी कार B से एक ही समय चलना प्रारंभ करती हैं । यदि ये कारें भिन्न भिन्न चारों से एक ही दिशा में चलती हैं , तो वे 5 घण्टे पश्चात मिलती हैं । यदि वे विपरीत दिशा में चलती हैं तो एक घण्टे पश्चात मिलती हैं । दोनों कारों की चाल ज्ञात कीजिए ।

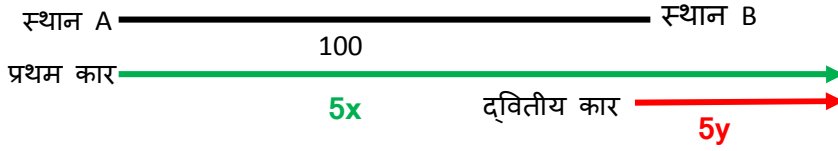
हल :- माना प्रथम कार की चाल x km/h तथा दूसरी कार की चाल y km/h है ।

स्थान A और B के बीच की कुल दूरी = 100 Km

यदि कारें एक ही दिशा में चलती हैं तथा 5 घण्टे पश्चात मिलती हैं तो

प्रथम कार द्वारा तय दूरी = $5x$ (क्योंकि दूरी = चाल \times समय)

दूसरी कार द्वारा तय दूरी = $5y$



प्रथम कार द्वारा तय दूरी - दूसरी कार द्वारा तय दूरी = 100 km

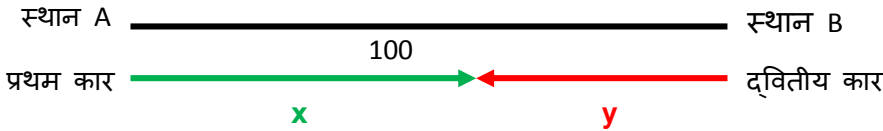
$$5x - 5y = 100$$

$$5x - 5y - 100 = 0 \dots\dots\dots (i)$$

यदि कारें विपरीत दिशा में चलती हैं तथा 1 घण्टे पश्चात मिलती हैं तो

प्रथम कार द्वारा तय दूरी = x (क्योंकि दूरी = चाल \times समय)

दूसरी कार द्वारा तय दूरी = y

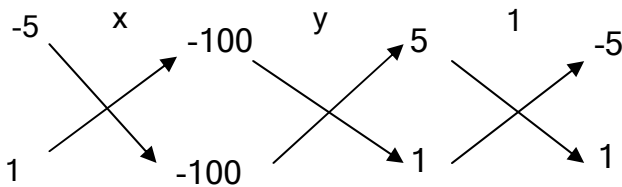


प्रथम कार द्वारा तय दूरी + दूसरी कार द्वारा तय दूरी = 100

$$x + y = 100$$

$$x + y - 100 = 0 \dots\dots\dots (ii)$$

वज्र गुणन विधि - समीकरण (i) व समीकरण (ii) से



$$\frac{x}{(-5)(-100) - (1)(-100)} = \frac{y}{(-100)(1) - (-100)(5)} = \frac{1}{(5)(1) - (1)(-5)}$$

$$\frac{x}{500+100} = \frac{y}{-100+500} = \frac{1}{5+5}$$

$$\frac{x}{600} = \frac{y}{400} = \frac{1}{10}$$

$$\frac{x}{600} = \frac{1}{10} \text{ तथा } \frac{y}{400} = \frac{1}{10}$$

$$x = \frac{600}{10} \text{ तथा } y = \frac{400}{10}$$

$$x = 60 \text{ तथा } y = 40$$

अतः प्रथम कार की चाल 60 km/h तथा दूसरी कार की चाल 40 km/h है ।

(v) एक आयत का क्षेत्रफल 9 वर्ग इकाई कम हो जाता है , यदि उसकी लम्बाई 5 इकाई कम कर दी जाती है और चौड़ाई 3 इकाई बढ़ा दी जाती है । यदि हम लंबाई को 3 इकाई और चौड़ाई को 2 इकाई बढ़ा दें तो क्षेत्रफल 67 इकाई वर्ग बढ़ जाता है । आयत की विमाएं ज्ञात कीजिए ।

हल :- माना आयत की लम्बाई x इकाई तथा चौड़ाई y इकाई है तो

$$\text{आयत का क्षेत्रफल} = \text{लम्बाई} \times \text{चौड़ाई} = (xy)$$

यदि लंबाई 5 इकाई कम कर दी जाए और चौड़ाई 3 इकाई बढ़ा दी जाए तो

$$(x-5)(y+5) = (xy-9)$$

$$xy+3x-5y-15 = xy-9$$

$$3x-5y-6 = 0 \dots\dots\dots (i)$$

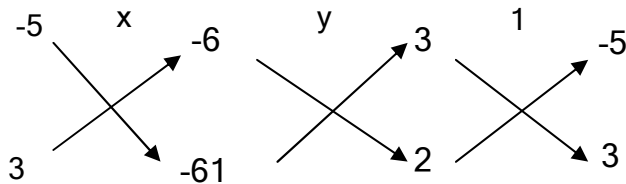
यदि लंबाई 3 इकाई और चौड़ाई 2 इकाई बढ़ा दी जाए तो

$$(x+3)(y+2) = xy+67$$

$$xy + 2x+3y+6 = xy+67$$

$$2x+3y-61 = 0 \dots\dots\dots (ii)$$

वज्र गुणन विधि - समीकरण (i) व समीकरण (ii) से



$$\frac{x}{(-5)(-6) - (3)(-6)} = \frac{y}{(-6)(2) - (-61)(3)} = \frac{1}{(3)(3) - (2)(-5)}$$

$$\frac{x}{305+1} = \frac{y}{-12+183} = \frac{1}{9+10}$$

$$\frac{x}{323} = \frac{y}{171} = \frac{1}{19}$$

$$\frac{x}{323} = \frac{1}{19} \text{ तथा } \frac{y}{171} = \frac{1}{19}$$

$$x = \frac{323}{19} \text{ तथा } y = \frac{171}{19}$$

$$x = 17 \text{ तथा } y = 9$$

अतः आयत की लम्बाई 17 इकाई तथा चौड़ाई 9 इकाई है ।